

«УТВЕРЖДАЮ»

Заместитель проректора – директор Департамента  
сопровождения научной деятельности ДВФУ

А.А. Сергеевич

« 18 » \_\_\_\_\_ 2020 г.

## ОТЗЫВ

ведущей организации – федерального автономного образовательного учреждения высшего образования «Дальневосточный федеральный университет»  
на диссертационную работу ЦОЯ Георгия Ильича  
по теме: «Модифицированные методы двойственности для решения вариационных и квазивариационных неравенств механики»,  
представленную на соискание ученой степени кандидата  
физико-математических наук по специальности  
05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

### 1. Актуальность темы исследования

В диссертации соискателя строятся и исследуются методы двойственности для решения вариационных и квазивариационных неравенств механики. Развитие методов двойственности для решения вариационных задач математической физики с ограничениями имеет давнюю историю. Но все исследования по этой тематике, как правило, сводится к классическому подходу к построению функционалов Лагранжа, в которых двойственные переменные линейным образом входят в функционал. В отличие от этих исследований, в данной работе развивается теория двойственности, построенная на основе модифицированных функционалов Лагранжа. Следует отметить, что теория модифицированных функций Лагранжа для конечномерных задач выпуклой оптимизации рассматривалась в работах Р. Рокафеллара, Е.Г. Гольштейна, Н.В. Третьякова, Р. Бертсекаса и других.

В диссертации Цоя Г.И. эти исследования проведены для решения интересных и важных с практической точки зрения бесконечномерных задач контактного взаимодействия упругих и жестких тел, упругих задач с трещинами, с условиями непроникания берегов трещины друг в друга. При этом все исследования доведены до числа, т.е. построены численные решения исследуемых задач. Применены современные технологии высокопроизводительных вычислений на графических ускорителях.

### 2. Структура и содержание диссертационной работы

Работа состоит из введения, трех глав, заключения, списка сокращений и условных обозначений, списка литературы из 120 наименований, списка иллюстративного материала, включающего 26 рисунков и 6 таблиц, приложения. Объем работы составляет 108 страниц машинописного текста.

Во введении даётся общее представление о вариационных неравенствах, их приложений для задач механики. На основе проведенного литературного обзора,

указываются цели и задачи исследования, формулируются научная новизна, практическая значимость и достоверность результатов. Приводятся структура диссертации.

Первая глава посвящена решению квазивариационного неравенства Синьорини, описывающего задачу о контакте между упругим телом и абсолютно твёрдой опорой с трением, заданным по закону Кулона. Для решения задачи используется метод последовательных приближений. Дается вариационная формулировка вспомогательной задачи с заданным трением, возникающей на шаге метода последовательных приближений. Вводится описание классических и модифицированных функционалов Лагранжа, определение седловой точки и условие её единственности. Приводится алгоритм поиска седловой точки модифицированного функционала Лагранжа, основанный на комбинировании алгоритма Удзавы и итеративной прох-регуляризации, обеспечивающей сильную выпуклость минимизируемых функционалов во вспомогательных задачах. В конце главы дается описание алгоритма численного решения задачи с помощью метода конечных элементов. Приводятся результаты численного счёта.

Во второй главе рассматривается решение задачи о равновесии упругого тела с трещиной, с условиями непроникания берегов трещины друг в друга. Приводится краевая постановка плоской задачи с трещиной внутри упругого тела и задачи с трещиной, выходящей на внешнюю границу под ненулевым углом. Строится и обосновывается общая схема двойственности. Доказывается основное равенство двойственности. Для решения задачи минимизации кусочно-квадратичного функционала, получаемого после дискретизации задачи с помощью МКЭ, используются метод покоординатного спуска и обобщенный метод Ньютона. Приводятся результаты численного счёта и сравнение методов. На примере 3D упругой задачи с трещиной приводится сравнение предложенного модифицированного метода двойственности с его классическим аналогом. Если в модифицированном методе двойственности реализуется чисто градиентный метод, то в классическом алгоритме применяется метод проекции градиента. Указанное обстоятельство обеспечивает быструю сходимость модифицированного метода в сравнении с классическим.

В третьей главе проводится исследование и решение контактной задачи теории упругости с отслоившимся жёстким включением. В начале главы дается общее описание данной задачи и её краевая постановка. Приводится итеративный метод решения с параметром  $\lambda$ , стремящимся к нулю, позволяющий рассматривать задачу с отслоившимся жёстким включением как предельную для семейства задач о равновесии упругих тел с трещиной. Для задачи с фиксированным  $\lambda$  применяется схема двойственности, исследованная во второй главе. Приводятся результаты численного решения задачи с использованием обобщенного метода Ньютона.

В заключении сформулированы основные результаты и выводы диссертационной работы.

В приложении приводится исходный код программы для решения задачи с трещиной с использованием библиотеки cuBLAS для вычислений на GPU.

### **3. Основные научные результаты и их новизна**

Научная новизна выполненной работы заключается в следующем:

1. Построен и обоснован метод, основанный на комбинировании алгоритма Удзавы и итеративной прох-регуляризации модифицированного функционала Лагранжа, для решения полуконвективных вспомогательных задач с заданным трением.

2. Предложена и теоретически обоснована модифицированная схема двойственности для решения многомерных задач теории упругости с трещиной. Доказано соотношение двойственности для исходной и двойственной задач.

3. Для решения задачи с отслоившимся жёстким включением исследован и применён метод решения с параметром управления  $\lambda$ , стремящимся к нулю.

4. Разработаны алгоритмы на основе метода конечных элементов и программное обеспечение для численного решения рассмотренных задач. Проведены численные эксперименты, подтверждающие эффективность модифицированных методов двойственности.

#### **4. Теоретическая и практическая и значимость работы**

Теоретическая значимость работы заключается в создании эффективных модифицированных методов двойственности для решения вариационных и квазивариационных неравенств механики. Предложенные схемы двойственности, основанные на модифицированных функционалах Лагранжа, обладают рядом преимуществ по сравнению с классическими аналогами, и позволяют конструировать устойчивые методы поиска седловых точек функционала Лагранжа.

Практическая значимость результатов заключается в создании программных комплексов с использованием технологий высокопроизводительных вычислений на графических ускорителях, которые могут быть использованы при решении прикладных задач.

#### **5. Апробация и публикации**

Достоверность полученных результатов обеспечивается корректностью постановок рассматриваемых задач и математических методов их исследования, применением известных численных методов. Результаты вычислительных экспериментов совпадают с численными решениями, полученными другими авторами.

Основные результаты по теме диссертации представлены в 14 печатных изданиях, 3 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК, 6 - в периодических научных журналах, индексируемых Web of Science и Scopus. Автором получено два свидетельства о государственной регистрации программы для ЭВМ. Диссертационная работа также была апробирована на всероссийских и международных конференциях.

#### **6. Соответствие содержания автореферата основным положениям диссертации**

Представленный автореферат отражает основные положения диссертационной работы и не превышает рекомендованный для кандидатских диссертаций объем.

Рукопись автореферата соответствует требованиям государственного стандарта ГОСТ 7.0.11-2011 и пунктам Положения о присуждении учёных степеней, утвержденного постановлением Правительства Российской Федерации от 24 сентября 2013 г. № 842.

#### **7. Замечания по диссертации**

1. Досадным недостатком работы является некоторая путаница разделов в самом ее начале. Так получилось, что “ВВЕДЕНИЕ” (стр. 4-10) в ней предшествует разделу “СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ” (стр. 11-12), в котором это “ВВЕДЕНИЕ” обещано ! Сам раздел “СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ” отсутствует в “Оглавлении” диссертации и непонятно откуда он и зачем. Само “ВВЕДЕНИЕ” фактически повторяет начало автореферата, что совершенно ненужно. В результате работа осталась на самом деле

без научного введения, где должны были быть приведены основные элементы таксономии и теории вариационных неравенств, ключевые результаты по существованию (и единственности, если было бы такое желание) решений. В этой области весьма большое разнообразие типов и для читателя это было бы весьма полезно. По факту работа начинается с места в карьер и разглядеть на стр. 15 некое неравенство и убедиться в том, что оно действительно “квази” не так легко для того, кто не занимается ими каждый день.

2. Подход, основанный на модифицированных функция Лагранжа и их проксимально регуляризацией выглядит весьма привлекательны и эффективным с теоретической точки зрения, поэтому экспериментальная проверка этого направления весьма своевременна и интересна. Однако она должна быть проведена достаточно самокритично и в этой связи эффективные результаты о сходимости за пару десятков итераций в задаче с многими сотнями (и тысячами) переменных должны быть внимательно проанализированы. Некоторое подозрение вызывает тот факт, что условием останова вычислений во всех тестах служит малость изменений прямых или двойственных переменных. На самом деле это не гарантирует малость отклонения от решения, например, по функционалу или по выполнению условий оптимальности (если речь идет об оптимизационных задачах).
3. В работе слишком много внимания уделяется графическим иллюстрациям решений, считая их доказательствами качества решений (дань древнегреческой традиции?). Однако все же в духе всеобщей цифровизации можно было бы провести и более детальный численный анализ, например, решений двойственных переменных (Рис. 2.6б, стр. 53), которые как-то негладко переходят в нуль в точке смыкания трещины. На стр. 35 походя упоминается, что для линейных трещин вопрос гладкости решений исследован полностью. Если так, то эти результаты можно было бы применить к этой задаче для верификации решения.
4. Некоторые мелочи: стр.48 – не “Таким образом”, а “Тогда”, стр. 65 – не “не эффективно”, а “неэффективно”, стр. 77 – что это за “норма <бесконечность>”, а какие это “ближайшие решения”? . В ссылке [108] нет страниц.

Данные замечания не снижают положительную оценку работы и не ставят под сомнение её адекватное качество.

## **8. Заключение**

Диссертация Цоя Г.И. «Модифицированные методы двойственности для решения вариационных и квазивариационных неравенств механики» представляет собой законченную научно-квалификационную работу, выполненную на актуальную тему. Полученные на основе проведенных исследований научные результаты имеют существенное значение для развития численных методов решения вариационных задач с ограничениями на искомое решение.

Тематика и результаты выполненных в диссертации исследований соответствуют паспорту специальности 05.13.18 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ». В целом представленная диссертационная работа удовлетворяет всем требованиям «Положения о присуждении ученых степеней», утвержденного Постановлением Правительства РФ «О порядке присуждения ученых степеней» от 24 сентября 2013 г. № 842, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а её автор, Цой Георгий Ильич, заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-

математических наук по специальности 05.13.18 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ».

Отзыв рассмотрен и утвержден на расширенном заседании кафедры информатики, математического и компьютерного моделирования Школы естественных наук ДВФУ под руководством заведующего кафедрой доктора физико-математических наук, профессора Чеботарева Александра Юрьевича, протокол № 6 от 07 февраля 2020 г.

Отзыв подготовлен Нурминским Евгением Алексеевичем, ведущим научным сотрудником Школы естественных наук ДВФУ, доктором физико-математических наук, профессором.

Председательствующий на расширенном заседании кафедры информатики, математического и компьютерного моделирования Школы естественных наук ДВФУ, заведующий кафедрой ШЕН ДВФУ, доктор физико-математических наук, профессор



Чеботарев  
Александр Юрьевич

*Собо*

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Дальневосточный федеральный университет»  
Адрес: 690950 г. Владивосток, ул. Суханова, 8  
Телефон: 8 (423) 243-34-72, 8 (423) 265-24-24 (доб. 2494)  
Факс: 8 (423) 243-23-15  
E-mail: nurminskiy.ea@dvfu.ru